A 甲第109号証

メールマガジン（経済用語・経済統計解説）

メールマガジン全体の目次

関連するメールマガジン

- 第69回　経済数学の基礎(ミクロ経済学編)　最大・最小化問題
- 第67回　*Mathematica* のススメ
- 第63回　金融リテラシー
- 第62回　経済数学の基礎(マクロ経済学編)　等比数列

第73回　経済数学の基礎(マクロ経済学編)　常用対数と自然対数[top]

2004年6月4日発行

国経館　　経済数学の基礎　常用対数と自然対数　メールマガジン　No.138

みなさん，こんにちは．マクロ経済学を担当している笹山です．

このメールマガジンは国際経済学科のメールマガジン「国経館」の１つとして，
国際経済学科のすべての学生に配信されています．

今回は，経済学でよく使われる自然対数の話です．

マクロ経済学のメールマガジンとしてはNo.73です．

【第１３８号】 経済数学の基礎　常用対数と自然対数

大学の経済学では「自然対数（しぜん・たいすう）natural logarithms」が登場します．高校の数学の教科書には自然対数の説明はありません．高校で習う対数は「常用対数（じょうよう・たいすう）base 10 logarithms」です．このあたりに大学での経済学，あるいは経済数学が難しいと感じる理由の１つがあるかもしれません．今回は，自然対数の経済的な意味を明らかにしておきたいと思います．自然対数は経済成長や銀行に預金をした場合の元利合計の複利計算などでよく使われており，実は結構身近な存在なのです．

内容の性格上，式が多く登場してきますが，根気よくつきあってください．後半では数式処理ソフト *Mathematica* での計算方法も紹介しておきます．

■高校数学では常用対数

まずは高校数学（数学 II）の復習から始めましょう．

（対数の定義）―――――――――――――
a > 0　かつ a は1でないとするとき，指数関数 y = a^x で，任意の正の実数Mに対して(M > 0)
　a^p = M
となる実数pがただ1つ決まる．このpを
log a M
と表し，これをaを底（てい）とするMの対数という．Mをlog a Mの真数（しんすう）という．

（常用対数）
10 を底とする対数 log 10 M を常用対数（じょうよう・たいすう．base 10 logarithm）という．

（対数の性質）―――――――――――――
[1] $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
[2] $\log_a M/N = \log_a M - \log_a N$
[3] $\log_a M^r = r \log_a M$

（底の変換公式）―――――――――――――
a, b, c が正の数で，a とc は1ではないとき，次の等式が成り立つ．

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

（例）
$\log_{10} 100 = 2$　10を底とする100の対数は2 と言います．
$10^2 = 100$ と同じことになります．

対数の底は10以外でもいいのですが，高校でなぜ10を底とする常用対数を学んだのかといえば，われわれは10進法に慣れ親しんでいるということでしょうか．

以上が，高校の数学の教科書に記載されている主な内容です．

■経済学では自然対数

経済学では常用対数でなく自然対数が使われます．自然対数とは何かをまず理解しましょう．

（自然対数）―――――――――――――
e を底とする対数 $\log_e M$ を自然対数（しぜん・たいすう base e logarithm）という．
ここで e とはe = 2.7182818...となる無理数．

$\log_e x = y$ 　<=>　 $e^y = x$

$\log_e x$ を簡単に $\ln x$ とよく書きます．ln はnatural logarithmを表します．
$\ln x = y$ では，xをえるためにはeを何乗(y)したらよいのかを意味しています．

$e^{(\ln x)} = x$　あるいは　$\ln e^x = x$

無理数(irrational number)には，皆さんがよく知っているものとしては，π= 3.1416...がありますが，それと似た概念だと思えばいいでしょう．

経済学では，常用対数でなく自然対数なのはなぜ

自然対数の底 e = 2.71828...は，1万円を年利率1（100%）の複利で預金したときの元利合計の値からきています．

1年に1回利息を元金に組み入れると，1年後の元利合計は　$1*(1 + 1)^1$
半年に1回利息を元金に組み入れると，1年後の元利合計は　$1*(1 +1/2)^2$
半年複利のために金利は1/2になります．以下同様です．

1月に1回利息を元金に組み入れると，1年後の元利合計は　$1*(1 +1/12)^{12}$
1日に1回利息を元金に組み入れると，1年後の元利合計は
$1*(1 +1/365)^{365}$
1年に1000回利息を元金に組み入れると，1年後の元利合計は
$1*(1+1/1000)^{1000}$

一般に，1年にn 回利息を元金に組み入れると，1年後の元利合計は
1*(1 +1/n)^n となります．

複利の計算からわかるように，n の数をかなり大きくしていくと，元利合計の値は限りなく大きくなっていくように感じますが，実はそうではなく上限があるのです．なぜなら金利の値は逆にどんどん小さくなっていくからです．結局，ある一定値に近づいていきます．それが自然対数の底 e = 2.71828..なのです．
複利の回数をどんなに大きくしていっても1年後の元利合計は 2.71828 万円を超えることはあり得ないのです．

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 = e$$

年利1(100%)でなく一般に年金利rで預金したとき，複利計算の間隔を年1回から半年，月，週，日，．．．としだいに連続的に短くしていったときの預金の元利合計の究極的な値は，次のように計算できます．
ここで，m = n/r とおくと，

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{(m r)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^r = e^r$$

同じようにして，t年後には

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{(nt)} = \lim_{n \to \infty}\left(\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n\right)^t = e^{(rt)}$$

一般に，A円を年利rの複利で預金した場合，t年後には元利合計は

A e^(rt)

で増加していきます．

複利の金利を経済成長率とみなせば，上の式はGDPの成長率を表していると読み替えることができます．GDPの初期値をAとし，年成長率をrとすれば，GDPは次の式に基づいて成長してきます．

A e^(rt)

■ *Mathematica* での表記法と計算

10 を底とする常用対数は，*Mathematica*では，Log[10, x] で表現します．自然対数はLog[E, x] ですが，通常は，Log[x]で表現します．
以下で太字の部分は *Mathematica* のプログラム部分です．

常用対数の例 **Log[10, 100]** -> 2

自然対数 **Log[E, 9]** = **Log[9]**
E(大文字)は自然対数の底の記号として使います．
Log[9] を実行すると，*Mathematica*はLog[9]と返します．これは*Mathematica*の性質としてまずは厳密解を計算するからです．数値解を表示するには，

N[Log[9]]
2.19722

小数点以下の桁数をもっと表示させたい場合は,
N[Log[9],17]
2.1972245773362194
全部で17桁表示になっています.

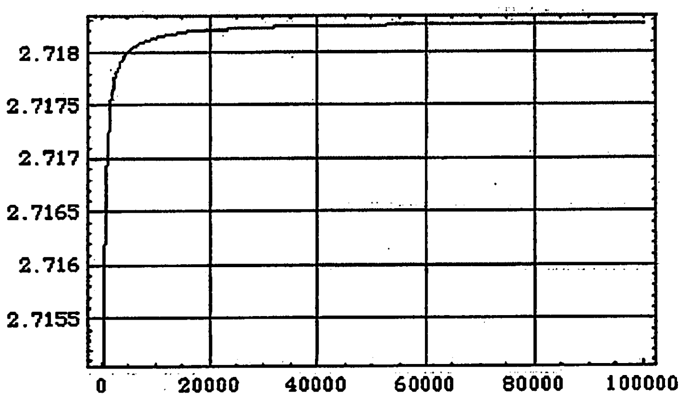
自然対数の底 e の計算を*Mathematica*で実験することができます.

```
TableForm[
Table[{x, N[(1 + 1/x)^x]}, {x, 1, 10}]
]
```

1	2.0
2	2.25
3	2.37037
4	2.44141
5	2.48832
6	2.52163
7	2.5465
8	2.56578
9	2.58117
10	2.59374

グラフで示すときは次のようにします.

```
Plot[
(1 + 1/x)^x, {x, 1, 100000},
GridLines -> Automatic,
Frame -> True
]
```



100万回計算すると, ちょっと時間がかかります.
N[1 (1 + 1/1000000)^1000000, 17]
答えは 2.7182804693193769

自然対数の底 e の意味を計算で確認すると次のようになります.

Limit[(1 + 1/n)^n, n -> Infinity]
答えは E

Limit[(1 + r/n)^n, n -> ∞]
答えは E^r

Limit[(1 + r/n)^(n t), n -> ∞]
答えは E^(r t)

■参考文献

Simon, Carl P.and Blume, Lawrence(1994), *Mathematics for Economists*, W W Norton. Chapter 5 Exponents and Logarithms

中級レベルの経済数学のテキストとして定評があるものです.

■高校数学を復習するサイト

数学トレーニング講座:
http://www.geocities.co.jp/Technopolis-Mars/5427/mathtrtop.html

高校数学を復習するには最適のサイトです. この中の「指数・対数」の部分を読んでください.

数学思い出コラム:
http://www.asahi-net.or.jp/~tt9h-hskw/sugaku/
この中に「対数コラム(1)常用対数が生活で利用されている例」
「対数コラム(2)自然対数の底 e はどこから出た」があります.

■まとめ――――――――
・高校数学では, 10を底とする常用対数を学んだが, 大学の経済学で重要なのは e を底とする自然対数.
・e =約2.7182 の無理数.
・e とは, 1万円を年利率1(100%)の複利で預金したときの元利合計の計算で, 複利回数を連続的に無限大に大きくしていったときの究極的な値.
・A円を年利rの複利で預金した場合, t年後の連続方式の元利合計は A e^(rt)
・GDPの初期値をAとし, 年成長率をrとすれば, GDPのt年後の値は A e^(rt)

(注意)後日サイトにアクセスした場合, サイトの構成に違いがでてきたり, URLが変更になっている場合がありますので, 了解してください.
(アクセス日)2004年6月4日

【Q & A】自然対数の底 e の値はおよそ?

→ 2.7182

【今回のサイト】 数学トレーニング講座:
http://www.geocities.co.jp/Technopolis-Mars/5427/mathtrtop.html

【評価】★★★

私の評価の基準:最高が★★★, 次が★★, 最後が★です.
★1つは普通という評価です.
データが十分提供されているかどうかが評価のポイントです.

【国経館アーカイブ】 http://groups.yahoo.co.jp/group/kokkeikan/

【発行】熊本学園大学 経済学部 国際経済学科
【著者】笹山 茂

[top] [マクロ経済学1に戻る]

Mail to: sasayama@kumagaku.ac.jp